NOTAÇÕES

$\mathbb{N}$: conjunto dos números naturais; $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

$\mathbb{Z}$: conjunto dos números inteiros

$\mathbb{Q}$: conjunto dos números racionais

$\mathbb{R}$: conjunto dos números reais

$\mathbb{C}$: conjunto dos números complexos

i : unidade imaginária: $i^2 = -1$

$|z|$: módulo do número $z \in \mathbb{C}$

$\overline{z}$: conjugado do número $z \in \mathbb{C}$

$\mathrm{Re}(z)$: parte real do número $z \in \mathbb{C}$

$\det A$: determinante da matriz A

A^t : transposta da matriz A

$\mathcal{P}(A)$: conjunto de todos os subconjuntos do conjunto A

$n(A)$: número de elementos do conjunto finito A

$P(A)$: probabilidade de ocorrência do evento A

$f \circ g$: função composta das funções f e g

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b\}$

$[a, b[\ = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x < b\}$

$]a, b] = \{x \in \mathbb{R};\ a < x \leq b\}$

$]a, b[\ = \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}$

$A \backslash B = \{x;\ x \in A \text{ e } x \notin B\}$

$\sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k,\ k \in \mathbb{N}$

Observação: Os sistemas de coordenadas considerados são cartesianos retangulares.

Questão 1. Das afirmações:

I. Se $x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, com $y \neq -x$, então $x + y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;

II. Se $x \in \mathbb{Q}$ e $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, então $xy \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;

III. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$, com $a < b < c$. Se $f{:}[a, c] \to [a, b]$ é sobrejetora, então f não é injetora,

é (são) verdadeira(s)

A ( ) apenas I e II.
B ( ) apenas I e III.
C ( ) apenas II e III.
D ( ) apenas III.
E ( ) nenhuma.

Questão 2. Considere as funções $f, g : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + m$, $g(x) = bx + n$, em que a, b, m e n são constantes reais. Se A e B são as imagens de f e de g, respectivamente, então, das afirmações abaixo:

I. Se $A = B$, então $a = b$ e $m = n$;

II. Se $A = \mathbb{Z}$, então $a = 1$;

III. Se $a, b, m, n \in \mathbb{Z}$, com $a = b$ e $m = -n$, então $A = B$,

é (são) verdadeira(s)

A ( ) apenas I. B ( ) apenas II. C ( ) apenas III.
D ( ) apenas I e II. E ( ) nenhuma.

Questão 3. A soma $\displaystyle\sum_{n=1}^{4} \frac{\log_{1/2} \sqrt[n]{32}}{\log_{1/2} 8^{n+2}}$ é igual a

A ( ) $\frac{8}{9}$. B ( ) $\frac{14}{15}$. C ( ) $\frac{15}{16}$. D ( ) $\frac{17}{18}$. E ( ) 1.

Questão 4. Se $z \in \mathbb{C}$, então $z^6 - 3\,|z|^4\,(z^2 - \overline{z}^2) - \overline{z}^6$ é igual a

A ( ) $(z^2 - \overline{z}^2)^3$. B ( ) $z^6 - \overline{z}^6$. C ( ) $(z^3 - \overline{z}^3)^2$.
D ( ) $(z - \overline{z})^6$. E ( ) $(z - \overline{z})^2\,(z^4 - \overline{z}^4)$.

Questão 5. Sejam $z, w \in \mathbb{C}$. Das afirmações:

I. $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2\left(|z|^2 + |w|^2\right)$;

II. $(z + \overline{w})^2 - (z - \overline{w})^2 = 4z\,\overline{w}$;

III. $|z + w|^2 - |z - w|^2 = 4\,\mathrm{Re}(z\,\overline{w})$,

é (são) verdadeira(s)

A ( ) apenas I. B ( ) apenas I e II. C ( ) apenas I e III.
D ( ) apenas II e III. E ( ) todas.

Questão 6. Considere os polinômios em $x \in \mathbb{R}$ da forma $p(x) = x^5 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x$. As raízes de $p(x) = 0$ constituem uma progressão aritmética de razão $\frac{1}{2}$ quando $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ é igual a

A ( ) $\left(\frac{1}{4},\ 0,\ \frac{5}{4}\right)$. B ( ) $\left(\frac{1}{4},\ 1,\ \frac{5}{4}\right)$. C ( ) $\left(\frac{1}{4},\ 0,\ -\frac{5}{4}\right)$.
D ( ) $\left(\frac{5}{4},\ 0,\ \frac{1}{4}\right)$. E ( ) $\left(\frac{1}{4},\ -1,\ -\frac{1}{4}\right)$.

Questão 7. Para os inteiros positivos k e n, com $k \leq n$, sabe-se que $\frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$.
Então, o valor de $\binom{n}{0} + \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \frac{1}{3}\binom{n}{2} + \ldots + \frac{1}{n+1}\binom{n}{n}$ é igual a

A ( ) $2^n + 1$. B ( ) $2^{n+1} + 1$. C ( ) $\frac{2^{n+1} + 1}{n}$. D ( ) $\frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$. E ( ) $\frac{2^n - 1}{n}$.

Questão 8. Considere as seguintes afirmações sobre as matrizes quadradas A e B de ordem n, com A inversível e B antissimétrica:

I. Se o produto AB for inversível, então n é par;

II. Se o produto AB não for inversível, então n é ímpar;

III. Se B for inversível, então n é par.

Destas afirmações, é (são) verdadeira(s)

A ( ) apenas I. B ( ) apenas I e II. C ( ) apenas I e III.
D ( ) apenas II e III. E ( ) todas.

Questão 9. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ y & -x & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} x+1 & x \\ y-2 & y \\ z+3 & z \end{bmatrix}$ matrizes reais tais que o produto AB é uma matriz antissimétrica. Das afirmações abaixo:

I. BA é antissimétrica;

II. BA não é inversível ;

III. O sistema $(BA)X = 0$, com $X^t = [x_1 \;\; x_2 \;\; x_3]$, admite infinitas soluções,

é (são) verdadeira(s)

A ( ) apenas I e II. B ( ) apenas II e III. C ( ) apenas I.
D ( ) apenas II. E ( ) apenas III.

Questão 10. Seja M uma matriz quadrada de ordem 3, inversível, que satisfaz a igualdade

$$\det(2M^2) - \det(\sqrt[3]{2}M^3) = \frac{2}{9}\det(3M).$$

Então, um valor possível para o determinante da inversa de M é

A ( ) $\frac{1}{3}$. B ( ) $\frac{1}{2}$. C ( ) $\frac{2}{3}$. D ( ) $\frac{4}{5}$. E ( ) $\frac{5}{4}$.

Questão 11. Considere a equação $A(t)X = B(t)$, $t \in \mathbb{R}$, em que $A(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-2t} & -e^{2t} & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ e $B(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ -\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$. Sabendo que $\det A(t) = 1$ e $t \neq 0$, os valores de x, y e z são, respectivamente,

A ( ) $2\sqrt{2}$, 0, $-3\sqrt{2}$. B ( ) $-2\sqrt{2}$, 0, $-3\sqrt{2}$. C ( ) 0, $3\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$.
D ( ) 0, $2\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$. E ( ) $2\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$, 0.

Questão 12. Considere o polinômio complexo $p(z) = z^4 + a\,z^3 + 5\,z^2 - i\,z - 6$, em que a é uma constante complexa. Sabendo que $2i$ é uma das raízes de $p(z) = 0$, as outras três raízes são

A ( ) $-3i, \ -1, \ 1$. B ( ) $-i, \ i, \ 1$. C ( ) $-i, \ i, \ -1$.
D ( ) $-2i, \ -1, \ 1$. E ( ) $-2i, \ -i, \ i$.

Questão 13. Sabendo que $\operatorname{sen} x = \dfrac{2ab}{a^2+b^2}$, $a \neq 0$ e $b \neq 0$, um possível valor para $\operatorname{cossec} 2x - \dfrac{1}{2}\operatorname{tg} x$ é

A ( ) $\dfrac{a-b}{ab}$. B ( ) $\dfrac{a+b}{2ab}$. C ( ) $\dfrac{a^2-b^2}{ab}$. D ( ) $\dfrac{a^2+b^2}{4ab}$. E ( ) $\dfrac{a^2-b^2}{4ab}$.

Questão 14. Considere o triângulo ABC retângulo em A. Sejam $\overline{AE}$ e $\overline{AD}$ a altura e a mediana relativa à hipotenusa $\overline{BC}$, respectivamente. Se a medida de $\overline{BE}$ é $(\sqrt{2}-1)\ cm$ e a medida de $\overline{AD}$ é $1\ cm$, então $\overline{AC}$ mede, em cm,

A ( ) $4\sqrt{2}-5$. B ( ) $3-\sqrt{2}$. C ( ) $\sqrt{6-2\sqrt{2}}$. D ( ) $3(\sqrt{2}-1)$. E ( ) $3\sqrt{4\sqrt{2}-5}$.

Questão 15. Seja ABC um triângulo de vértices $A = (1,4)$, $B = (5,1)$ e $C = (5,5)$. O raio da circunferência circunscrita ao triângulo mede, em unidades de comprimento,

A ( ) $\dfrac{15}{8}$. B ( ) $\dfrac{5\sqrt{17}}{4}$. C ( ) $\dfrac{3\sqrt{17}}{5}$. D ( ) $\dfrac{5\sqrt{17}}{8}$. E ( ) $\dfrac{17\sqrt{5}}{8}$.

Questão 16. Em um triângulo isósceles ABC, cuja área mede $48\ cm^2$, a razão entre as medidas da altura $\overline{AP}$ e da base $\overline{BC}$ é igual a $\dfrac{2}{3}$. Das afirmações abaixo:

I. As medianas relativas aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ medem $\sqrt{97}\ cm$;

II. O baricentro dista $4\ cm$ do vértice A;

III. Se α é o ângulo formado pela base $\overline{BC}$ com a mediana $\overline{BM}$, relativa ao lado $\overline{AC}$, então $\cos\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{97}}$,

é (são) verdadeira(s)

A ( ) apenas I. B ( ) apenas II. C ( ) apenas III.
D ( ) apenas I e III. E ( ) apenas II e III.

Questão 17. Considere o trapézio $ABCD$ de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. Sejam M e N os pontos médios das diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, respectivamente. Então, se $\overline{AB}$ tem comprimento x e $\overline{CD}$ tem comprimento $y < x$, o comprimento de $\overline{MN}$ é igual a

A ( ) $x-y$. B ( ) $\dfrac{1}{2}(x-y)$. C ( ) $\dfrac{1}{3}(x-y)$. D ( ) $\dfrac{1}{3}(x+y)$. E ( ) $\dfrac{1}{4}(x+y)$.

Questão 18. Uma pirâmide de altura $h = 1\ cm$ e volume $V = 50\ cm^3$ tem como base um polígono convexo de n lados. A partir de um dos vértices do polígono traçam-se $n-3$ diagonais que o decompõem em $n-2$ triângulos cujas áreas S_i, $i = 1, 2, ..., n-2$, constituem uma progressão aritmética na qual $S_3 = \dfrac{3}{2}\ cm^2$ e $S_6 = 3\ cm^2$. Então n é igual a

A ( ) 22. B ( ) 24. C ( ) 26. D ( ) 28. E ( ) 32.

Questão 19. A equação do círculo localizado no 1º quadrante que tem área igual a 4π (unidades de área) e é tangente, simultaneamente, às retas $r : 2x - 2y + 5 = 0$ e $s : x + y - 4 = 0$ é

A ( ) $(x - \frac{3}{4})^2 + (y - \frac{10}{4})^2 = 4$.

B ( ) $(x - \frac{3}{4})^2 + (y - (2\sqrt{2} + \frac{3}{4}))^2 = 4$.

C ( ) $(x - (2\sqrt{2} + \frac{3}{4}))^2 + (y - \frac{10}{4})^2 = 4$.

D ( ) $(x - (2\sqrt{2} + \frac{3}{4}))^2 + (y - \frac{13}{4})^2 = 4$.

E ( ) $(x - (2\sqrt{2} + \frac{3}{4}))^2 + (y - \frac{11}{4})^2 = 4$.

Questão 20. Considere o sólido de revolução obtido pela rotação de um triângulo isósceles ABC em torno de uma reta paralela à base $\overline{BC}$ que dista $0,25\ cm$ do vértice A e $0,75\ cm$ da base $\overline{BC}$. Se o lado $\overline{AB}$ mede $\dfrac{\sqrt{\pi^2+1}}{2\pi}\ cm$, o volume desse sólido, em cm^3, é igual a

A ( ) $\dfrac{9}{16}$. B ( ) $\dfrac{13}{96}$. C ( ) $\dfrac{7}{24}$. D ( ) $\dfrac{9}{24}$. E ( ) $\dfrac{11}{96}$.

AS QUESTÕES DISSERTATIVAS, NUMERADAS DE 21 A 30, DEVEM SER RESOLVIDAS E RESPONDIDAS NO CADERNO DE SOLUÇÕES.

Questão 21. Considere as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{\alpha x}$, em que α é uma constante real positiva, e $g : [0, \infty[\to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{x}$. Determine o conjunto-solução da inequação

$$(g \circ f)(x) > (f \circ g)(x).$$

Questão 22. Determine as soluções reais da equação em x, $\left(\log_4 x\right)^3 - \log_4(x^4) - 3\,\frac{\log_{10} 16\,x}{\log_{100} 16} = 0$.

Questão 23.

a) Determine o valor máximo de $|z + i|$, sabendo que $|z - 2| = 1$, $z \in \mathbb{C}$.

b) Se $z_o \in \mathbb{C}$ satisfaz (a), determine z_o.

Questão 24. Seja Ω o espaço amostral que representa todos os resultados possíveis do lançamento simultâneo de três dados. Se $A \subset \Omega$ é o evento para o qual a soma dos resultados dos três dados é igual a 9 e $B \subset \Omega$ o evento cuja soma dos resultados é igual a 10, calcule:

a) $n(\Omega)$;

b) $n(A)$ e $n(B)$;

c) $P(A)$ e $P(B)$.

Questão 25. Determine quantos paralelepípedos retângulos diferentes podem ser construídos de tal maneira que a medida de cada uma de suas arestas seja um número inteiro positivo que não exceda 10.

Questão 26. Considere o sistema linear nas incógnitas x, y e z

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ -x + (\operatorname{sen}\theta)\, y + 4z = 0 \\ 2x + (1-\cos 2\theta)\, y + 16z = 0 \end{cases}, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

a) Determine θ tal que o sistema tenha infinitas soluções.

b) Para θ encontrado em (a), determine o conjunto-solução do sistema.

Questão 27. Determine o conjunto de todos os valores de $x \in [0, 2\pi]$ que satisfazem, simultaneamente, a

$$\frac{2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1}{\cos x - 1} < 0 \qquad \text{e} \qquad \operatorname{tg} x + \sqrt{3} < (1 + \sqrt{3}\operatorname{cotg} x)\operatorname{cotg} x\ .$$

Questão 28. Seis esferas de mesmo raio R são colocadas sobre uma superfície horizontal de tal forma que seus centros definam os vértices de um hexágono regular de aresta $2R$. Sobre estas esferas é colocada uma sétima esfera de raio $2R$ que tangencia todas as demais. Determine a distância do centro da sétima esfera à superfície horizontal.

Questão 29. Três circunferências C_1, C_2 e C_3 são tangentes entre si, duas a duas, externamente. Os raios r_1, r_2 e r_3 destas circunferências constituem, nesta ordem, uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{3}$. A soma dos comprimentos de C_1, C_2 e C_3 é igual a $26\pi\ cm$. Determine:

a) a área do triângulo cujos vértices são os centros de C_1, C_2 e C_3.

b) o volume do sólido de revolução obtido pela rotação do triângulo em torno da reta que contém o maior lado.

Questão 30. Um cilindro reto de altura $h = 1\ cm$ tem sua base no plano xy definida por

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 \leq 0.$$

Um plano, contendo a reta $y - x = 0$ e paralelo ao eixo do cilindro, o secciona em dois sólidos. Calcule a área total da superfície do menor sólido.