NOTAÇÕES

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

$\mathbb{R}$: conjunto dos números reais

$\mathbb{C}$: conjunto dos números complexos

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R};\ a \le x \le b\}$

$(a, +\infty) =]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R};\ a < x < +\infty\}$

$A \backslash B = \{x \in A;\ x \notin B\}$

A^C : complementar do conjunto A

i : unidade imaginária: $i^2 = -1$

$|z|$: módulo do número $z \in \mathbb{C}$

$\mathrm{Re}\, z$: parte real do número $z \in \mathbb{C}$

$\mathrm{Im}\, z$: parte imaginária do número $z \in \mathbb{C}$

$M_{m\times n}(\mathbb{R})$: conjunto das matrizes reais $m \times n$

A^t : transposta da matriz A

$\det A$: determinante da matriz A

$P(A)$: conjunto de todos os subconjuntos do conjunto A

$n(A)$: número de elementos do conjunto finito A

$\overline{AB}$: segmento de reta unindo os pontos A e B

$tr A$: soma dos elementos da diagonal principal da matriz quadrada A

Observação: Os sistemas de coordenadas considerados são cartesianos retangulares.

Questão 1. Sejam A e B subconjuntos do conjunto universo $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. Sabendo que $(B^C \cup A)^C = \{f, g, h\}$, $B^C \cap A = \{a, b\}$ e $A^C \backslash B = \{d, e\}$, então, $n(P(A \cap B))$ é igual a

A ( ) 0. B ( ) 1. C ( ) 2. D ( ) 4. E ( ) 8.

Questão 2. Uma empresa possui 1000 carros, sendo uma parte com motor a gasolina e o restante com motor "flex" (que funciona com álcool e com gasolina). Numa determinada época, neste conjunto de 1000 carros, 36% dos carros com motor a gasolina e 36% dos carros com motor "flex" sofrem conversão para também funcionar com gás GNV. Sabendo-se que, após esta conversão, 556 dos 1000 carros desta empresa são bicombustíveis, pode-se afirmar que o número de carros tricombustíveis é igual a

A ( ) 246. B ( ) 252. C ( ) 260. D ( ) 268. E ( ) 284.

Questão 3. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\backslash\{0\}$ uma função satisfazendo às condições:

$$f(x+y) = f(x)\, f(y)\,, \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad f(x) \neq 1, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Das afirmações:

I. f pode ser ímpar.

II. $f(0) = 1$.

III. f é injetiva.

IV. f não é sobrejetiva, pois $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

é (são) falsa(s) apenas

A ( ) I e III. B ( ) II e III. C ( ) I e IV. D ( ) IV. E ( ) I.

Questão 4. Se $a = \cos\frac{\pi}{5}$ e $b = \operatorname{sen}\frac{\pi}{5}$, então, o número complexo $\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}\right)^{54}$ é igual a

A ( ) $a + bi$. B ( ) $-a + bi$. C ( ) $(1 - 2a^2b^2) + ab(1 + b^2)i$.
D ( ) $a - bi$. E ( ) $1 - 4a^2b^2 + 2ab(1 - b^2)i$.

Questão 5. O polinômio de grau 4

$$(a + 2b + c)x^4 + (a + b + c)x^3 - (a - b)x^2 + (2a - b + c)x + 2(a + c),$$

com $a, b, c \in \mathbb{R}$, é uma função par. Então, a soma dos módulos de suas raízes é igual a

A ( ) $3 + \sqrt{3}$. B ( ) $2 + 3\sqrt{3}$. C ( ) $2 + \sqrt{2}$. D ( ) $1 + 2\sqrt{2}$. E ( ) $2 + 2\sqrt{2}$.

Questão 6. Considere as funções $f(x) = x^4 + 2x^3 - 2x - 1$ e $g(x) = x^2 - 2x + 1$. A multiplicidade das raízes não reais da função composta $f \circ g$ é igual a

A ( ) 1. B ( ) 2. C ( ) 3. D ( ) 4. E ( ) 5.

Questão 7. Suponha que os coeficientes reais a e b da equação $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ são tais que a equação admite solução não real r com $|r| \neq 1$. Das seguintes afirmações:

I. A equação admite quatro raízes distintas, sendo todas não reais.
II. As raízes podem ser duplas.
III. Das quatro raízes, duas podem ser reais.

é (são) verdadeira(s)

A ( ) apenas I. B ( ) apenas II. C ( ) apenas III.
D ( ) apenas II e III. E ( ) nenhuma.

Questão 8. Se as soluções da equação algébrica $2x^3 - ax^2 + bx + 54 = 0$, com coeficientes $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, formam, numa determinada ordem, uma progressão geométrica, então, $\frac{a}{b}$ é igual a

A ( ) -3. B ( ) $-\frac{1}{3}$. C ( ) $\frac{1}{3}$. D ( ) 1. E ( ) 3.

Questão 9. Dados $A \in M_{3\times2}(\mathbb{R})$ e $b \in M_{3\times1}(\mathbb{R})$, dizemos que $X_0 \in M_{2\times1}(\mathbb{R})$ é a melhor aproximação quadrática do sistema $AX = b$ quando $\sqrt{(AX_0 - b)^t(AX_0 - b)}$ assume o menor valor possível. Então, dado o sistema

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

a sua melhor aproximação quadrática é

A ( ) $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. B ( ) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. C ( ) $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$. D ( ) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. E ( ) $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Questão 10. O sistema

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}, \quad a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

com $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$, $a_1c_1 + a_2c_2 = b_1c_1 + b_2c_2 = 0$, é

A ( ) determinado.
B ( ) determinado somente quando $c_1 \neq 0$ e $c_2 \neq 0$.
C ( ) determinado somente quando $c_1 \neq 0$ e $c_2 = 0$ ou $c_1 = 0$ e $c_2 \neq 0$.
D ( ) impossível.
E ( ) indeterminado.

Questão 11. Seja $A \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica e não nula, cujos elementos são tais que a_{11}, a_{12} e a_{22} formam, nesta ordem, uma progressão geométrica de razão $q \neq 1$ e $trA = 5a_{11}$. Sabendo-se que o sistema $AX = X$ admite solução não nula $X \in M_{2\times1}(\mathbb{R})$, pode-se afirmar que $a_{11}^2 + q^2$ é igual a

A ( ) $\frac{101}{25}$. B ( ) $\frac{121}{25}$. C ( ) 5. D ( ) $\frac{49}{9}$. E ( ) $\frac{25}{4}$.

Questão 12. Um certo exame de inglês é utilizado para classificar a proficiência de estrangeiros nesta língua. Dos estrangeiros que são proficientes em inglês, 75% são bem avaliados neste exame. Entre os não proficientes em inglês, 7% são eventualmente bem avaliados. Considere uma amostra de estrangeiros em que 18% são proficientes em inglês. Um estrangeiro, escolhido desta amostra ao acaso, realizou o exame sendo classificado como proficiente em inglês. A probabilidade deste estrangeiro ser efetivamente proficiente nesta língua é de aproximadamente

A ( ) 73%. B ( ) 70%. C ( ) 68%. D ( ) 65%. E ( ) 64%.

Questão 13. Considere o triângulo ABC de lados $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ e $c = \overline{AB}$ e ângulos internos $\alpha = C\widehat{A}B$, $\beta = A\widehat{B}C$ e $\gamma = B\widehat{C}A$. Sabendo-se que a equação $x^2 - 2bx\cos\alpha + b^2 - a^2 = 0$ admite c como raiz dupla, pode-se afirmar que

A ( ) $\alpha = 90^o$.
B ( ) $\beta = 60^o$.
C ( ) $\gamma = 90^o$.
D ( ) O triângulo é retângulo apenas se $\alpha = 45^o$.
E ( ) O triângulo é retângulo e b é hipotenusa.

Questão 14. No plano, considere S o lugar geométrico dos pontos cuja soma dos quadrados de suas distâncias à reta $t : x = 1$ e ao ponto $A = (3, 2)$ é igual a 4. Então, S é

A ( ) uma circunferência de raio $\sqrt{2}$ e centro $(2, 1)$.
B ( ) uma circunferência de raio 1 e centro $(1, 2)$.
C ( ) uma hipérbole.
D ( ) uma elipse de eixos de comprimento $2\sqrt{2}$ e 2.
E ( ) uma elipse de eixos de comprimento 2 e 1.

Questão 15. Do triângulo de vértices A, B e C, inscrito em uma circunferência de raio $R = 2\ cm$, sabe-se que o lado $\overline{BC}$ mede $2\ cm$ e o ângulo interno $A\hat{B}C$ mede 30^o. Então, o raio da circunferência inscrita neste triângulo tem o comprimento, em cm, igual a

A ( ) $2-\sqrt{3}$. B ( ) $\frac{1}{3}$. C ( ) $\frac{\sqrt{2}}{4}$. D ( ) $2\sqrt{3}-3$. E ( ) $\frac{1}{2}$.

Questão 16. A distância entre o vértice e o foco da parábola de equação $2x^2 - 4x - 4y + 3 = 0$ é igual a

A ( ) 2. B ( ) $\frac{3}{2}$. C ( ) 1. D ( ) $\frac{3}{4}$. E ( ) $\frac{1}{2}$.

Questão 17. A expressão

$$\frac{2\left[\operatorname{sen}\left(x+\frac{11}{2}\pi\right)+\operatorname{cotg}^2 x\right]\ \operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$$

é equivalente a

A ( ) $[\cos x - \operatorname{sen}^2 x]\operatorname{cotg} x$. B ( ) $[\operatorname{sen} x + \cos x]\operatorname{tg} x$. C ( ) $[\cos^2 x - \operatorname{sen} x]\operatorname{cotg}^2 x$.
D ( ) $[1-\operatorname{cotg}^2 x]\operatorname{sen} x$. E ( ) $[1+\operatorname{cotg}^2 x][\operatorname{sen} x + \cos x]$.

Questão 18. Sejam C uma circunferência de raio $R > 4$ e centro $(0,0)$ e $\overline{AB}$ uma corda de C. Sabendo que $(1,3)$ é ponto médio de $\overline{AB}$, então uma equação da reta que contém $\overline{AB}$ é

A ( ) $y + 3x - 6 = 0$. B ( ) $3y + x - 10 = 0$. C ( ) $2y + x - 7 = 0$.
D ( ) $y + x - 4 = 0$. E ( ) $2y + 3x - 9 = 0$.

Questão 19. Uma esfera é colocada no interior de um cone circular reto de $8\ cm$ de altura e de 60^o de ângulo de vértice. Os pontos de contato da esfera com a superfície lateral do cone definem uma circunferência e distam $2\sqrt{3}\ cm$ do vértice do cone. O volume do cone não ocupado pela esfera, em cm^3, é igual a

A ( ) $\frac{416}{9}\pi$. B ( ) $\frac{480}{9}\pi$. C ( ) $\frac{500}{9}\pi$. D ( ) $\frac{512}{9}\pi$. E ( ) $\frac{542}{9}\pi$.

Questão 20. Os pontos $A = (3,4)$ e $B = (4,3)$ são vértices de um cubo, em que $\overline{AB}$ é uma das arestas. A área lateral do octaedro cujos vértices são os pontos médios da face do cubo é igual a

A ( ) $\sqrt{8}$. B ( ) 3. C ( ) $\sqrt{12}$. D ( ) 4. E ( ) $\sqrt{18}$.

AS QUESTÕES DISSERTATIVAS, NUMERADAS DE 21 A 30, DEVEM SER RESOLVIDAS E RESPONDIDAS NO CADERNO DE SOLUÇÕES.

Questão 21. Seja S o conjunto solução da inequação

$$(x-9)\left|\log_{x+4}(x^3-26x)\right| \leq 0.$$

Determine o conjunto S^C.

Questão 22. **Sejam** $x, y \in \mathbb{R}$ e $w = x^2(1+3i) + y^2(4-i) - x(2+6i) + y(-16+4i) \in \mathbb{C}$. Identifique e esboce o conjunto

$$\Omega = \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \operatorname{Re} w \leq -13\ e\ \operatorname{Im} w \leq 4\}.$$

Questão 23. Seja $f : \mathbb{R}\backslash\{-1\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+1}$.

a) Mostre que f é injetora.

b) Determine $D = \{\ f(x);\ x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}\ \}$ e $f^{-1}:\ D \to \mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

Questão 24. Suponha que a equação algébrica

$$x^{11} + \sum_{n=1}^{10} a_n x^n + a_0 = 0$$

tenha coeficientes reais $a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_{10}$ tais que as suas onze raízes sejam todas simples e da forma $\beta + i\gamma_n$, em que $\beta,\ \gamma_n \in \mathbb{R}$ e os $\gamma_n,\ n = 1, 2,\ \ldots, 11$, formam uma progressão aritmética de razão real $\gamma \neq 0$. Considere as três afirmações abaixo e responda se cada uma delas é, respectivamente, verdadeira ou falsa, justificando sua resposta:

I. Se $\beta = 0$, então $a_0 = 0$. II. Se $a_{10} = 0$, então $\beta = 0$. III. Se $\beta = 0$, então $a_1 = 0$.

Questão 25. Um determinado concurso é realizado em duas etapas. Ao longo dos últimos anos, 20% dos candidatos do concurso têm conseguido na primeira etapa nota superior ou igual à nota mínima necessária para poder participar da segunda etapa. Se tomarmos 6 candidatos dentre os muitos inscritos, qual é a probabilidade de no mínimo 4 deles conseguirem nota para participar da segunda etapa?

Questão 26. Sejam $A, B \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Mostre as propriedades abaixo:

a) Se AX é a matriz coluna nula, para todo $X \in M_{3\times 1}(\mathbb{R})$, então A é a matriz nula.

b) Se A e B são não nulas e tais que AB é a matriz nula, então $\det A = \det B = 0$.

Questão 27. Sabendo que $\operatorname{tg}^2\left(x + \dfrac{1}{6}\pi\right) = \dfrac{1}{2}$, para algum $x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\pi\right]$, determine $\operatorname{sen} x$.

Questão 28. Dadas a circunferência $C: \ (x-3)^2 + (y-1)^2 = 20$ e a reta $r: \ 3x - y + 5 = 0$, considere a reta t que tangencia C, forma um ângulo de 45^o com r e cuja distância à origem é $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$. Determine uma equação da reta t.

Questão 29. Considere as n retas

$$r_i : y = m_i x + 10, \ \ i = 1, 2, ..., n; \ \ n \geq 5,$$

em que os coeficientes m_i, em ordem crescente de i, formam uma progressão aritmética de razão $q > 0$. Se $m_1 = 0$ e a reta r_5 tangencia a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 25$, determine o valor de q.

Questão 30. A razão entre a área lateral e a área da base octogonal de uma pirâmide regular é igual a $\sqrt{5}$. Exprima o volume desta pirâmide em termos da medida a do apótema da base.