NOTAÇÕES

$\mathbb{N}$: conjunto dos números naturais
$\mathbb{Z}$: conjunto dos números inteiros
$\mathbb{Q}$: conjunto dos números racionais
$\mathbb{R}$: conjunto dos números reais

$\mathbb{C}$: conjunto dos números complexos
i : unidade imaginária: $i^2 = -1$
$\overline{z}$: conjugado do número $z \in \mathbb{C}$
$|z|$: módulo do número $z \in \mathbb{C}$

$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\}$
$[a, b[\; = \{x \in \mathbb{R} : \; a \leq x < b\}$
$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : \; a \leq x \leq b\}$
$]a, b[\; = \{x \in \mathbb{R} : \; a < x < b\}$

$\mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$: conjunto das matrizes reais $m \times n$
$\det M$: determinante da matriz M

$P(A)$: conjunto de todos os subconjuntos do conjunto A
$n(A)$: número de elementos do conjunto finito A

$\overline{AB}$: segmento de reta unindo os pontos A e B
$A\hat{B}C$: ângulo formado pelos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, com vértice no ponto B

$$\sum_{n=0}^{k} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_k x^k, \; k \in \mathbb{N}$$

Observação: Os sistemas de coordenadas considerados são cartesianos retangulares.

Questão 01. Dado $z = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}\, i)$, então $\sum_{n=1}^{89} z^n$ é igual a

A ( ) $-\frac{89}{2}\sqrt{3}\, i$.
B ( ) -1.
C ( ) 0.
D ( ) 1.
E ( ) $\frac{89}{6}\sqrt{3}\, i$.

Questão 02. Das afirmações abaixo sobre números complexos z_1 e z_2 :

$I -$ $|z_1 - z_2| \leq \big|\, |z_1| - |z_2| \,\big|$.

$II -$ $|\overline{z}_1 . z_2| = \big|\, |\overline{z}_2| . |\overline{z}_2| \,\big|$.

$III -$ Se $z_1 = |z_1| \, (cos\,\theta + i\; sen\,\theta) \neq 0$, então $z_1^{-1} = |z_1|^{-1} \, (cos\,\theta - i\; sen\,\theta)$.

é(são) sempre verdadeira(s)

A ( ) apenas I.
B ( ) apenas II.
C ( ) apenas III.
D ( ) apenas II e III.
E ( ) todas.

Questão 03. A soma de todas as soluções da equação em $\mathbb{C}$: $z^2 + |z|^2 + i\, z - 1 = 0$ é igual a

A ( ) 2.
B ( ) $\frac{i}{2}$.
C ( ) 0.
D ( ) $-\frac{1}{2}$.
E ( ) $-2i$.

Questão 04. Numa caixa com 40 moedas, 5 apresentam duas caras, 10 são normais (cara e coroa) e as demais apresentam duas coroas. Uma moeda é retirada ao acaso e a face observada mostra uma coroa. A probabilidade de a outra face desta moeda também apresentar uma coroa é

A ( ) $\frac{7}{8}$. B ( ) $\frac{5}{7}$. C ( ) $\frac{5}{8}$. D ( ) $\frac{3}{5}$. E ( ) $\frac{3}{7}$.

Questão 05. Sejam A e B conjuntos finitos e não vazios tais que $A \subset B$ e $n(\{C : C \subset B \setminus A\}) = 128$. Então, das afirmações abaixo:

$I -$ $n(B) - n(A)$ é único;

$II -$ $n(B) + n(A) \leq 128$;

$III -$ a dupla ordenada $(n(A), n(B))$ é única;

é(são) verdadeira(s)

A ( ) apenas I. B ( ) apenas II. C ( ) apenas III.
D ( ) apenas I e II. E ( ) nenhuma.

Questão 06. O sistema $\begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ y + 2z = b \\ 3x - y - 5c\,z = 0 \end{cases}$

A ( ) é possível, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$.

B ( ) é possível quando $a = \frac{7\,b}{3}$ ou $c \neq 1$.

C ( ) é impossível quando $c = 1$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

D ( ) é impossível quando $a \neq \frac{7\,b}{3}$, $\forall c \in \mathbb{R}$.

E ( ) é possível quando $c = 1$ e $a \neq \frac{7\,b}{3}$.

Questão 07. Considere as afirmações abaixo:

$I -$ Se M é uma matriz quadrada de ordem $n > 1$, não-nula e não-inversível, então existe matriz não-nula N, de mesma ordem, tal que MN é matriz nula.

$II -$ Se M é uma matriz quadrada inversível de ordem n tal que $\det(M^2 - M) = 0$, então existe matriz não-nula X, de ordem $n \times 1$, tal que $MX = X$.

$III -$ A matriz $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \dfrac{tg\,\theta}{\sec\theta} & 1 - 2\,\operatorname{sen}^2\dfrac{\theta}{2} \end{bmatrix}$ é inversível, $\forall \theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Destas, é(são) verdadeira(s)

A ( ) apenas II. B ( ) apenas I e II. C ( ) apenas I e III.
D ( ) apenas II e III. E ( ) todas.

Questão 08. Se 1 é uma raiz de multiplicidade 2 da equação $x^4 + x^2 + ax + b = 0$, com $a, b \in \mathbb{R}$, então $a^2 - b^3$ é igual a

A ( ) -64. B ( ) -36. C ( ) -28. D ( ) 18. E ( ) 27.

Questão 09. O produto das raízes reais da equação $|x^2 - 3x + 2| = |2x - 3|$ é igual a

A ( ) -5. B ( ) -1. C ( ) 1. D ( ) 2. E ( ) 5.

Questão 10. Considere a equação algébrica $\sum_{k=1}^{3} (x - a_k)^{4-k} = 0$. Sabendo que $x = 0$ é uma das raízes e que (a_1, a_2, a_3) é uma progressão geométrica com $a_1 = 2$ e soma 6, pode-se afirmar que

A ( ) a soma de todas as raízes é 5.
B ( ) o produto de todas as raízes é 21.
C ( ) a única raiz real é maior que zero.
D ( ) a soma das raízes não reais é 10.
E ( ) todas as raízes são reais.

Questão 11. A expressão $4e^{2x} + 9e^{2y} - 16e^x - 54e^y + 61 = 0$, com x e y reais, representa

A ( ) o conjunto vazio.
B ( ) um conjunto unitário.
C ( ) um conjunto não-unitário com um número finito de pontos.
D ( ) um conjunto com um número infinito de pontos.
E ( ) o conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2(e^x - 2)^2 + 3(e^y - 3)^2 = 1\}$.

Questão 12. Com respeito à equação polinomial $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = 0$ é correto afirmar que

A ( ) todas as raízes estão em $\mathbb{Q}$.
B ( ) uma única raiz está em $\mathbb{Z}$ e as demais estão em $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$.
C ( ) duas raízes estão em $\mathbb{Q}$ e as demais têm parte imaginária não-nula.
D ( ) não é divisível por $2x - 1$.
E ( ) uma única raiz está em $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ e pelo menos uma das demais está em $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Questão 13. Sejam m e n inteiros tais que $\frac{m}{n} = -\frac{2}{3}$ e a equação $36x^2 + 36y^2 + mx + ny - 23 = 0$ representa uma circunferência de raio $r = 1$ cm e centro C localizado no segundo quadrante. Se A e B são os pontos onde a circunferência cruza o eixo Oy, a área do triângulo ABC, em cm^2, é igual a

A ( ) $\frac{8\sqrt{2}}{3}$. B ( ) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$. C ( ) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. D ( ) $\frac{2\sqrt{2}}{9}$. E ( ) $\frac{\sqrt{2}}{9}$.

Questão 14. Entre duas superposições consecutivas dos ponteiros das horas e dos minutos de um relógio, o ponteiro dos minutos varre um ângulo cuja medida, em *radianos*, é igual a

A ( ) $\frac{23}{11}\pi$. B ( ) $\frac{13}{6}\pi$. C ( ) $\frac{24}{11}\pi$. D ( ) $\frac{25}{11}\pi$. E ( ) $\frac{7}{3}\pi$.

Questão 15. Seja ABC um triângulo retângulo cujos catetos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ medem $8\,cm$ e $6\,cm$, respectivamente. Se D é um ponto sobre $\overline{AB}$ e o triângulo ADC é isósceles, a medida do segmento $\overline{AD}$, em cm, é igual a

A ( ) $\frac{3}{4}$. B ( ) $\frac{15}{6}$. C ( ) $\frac{15}{4}$. D ( ) $\frac{25}{4}$. E ( ) $\frac{25}{2}$.

Questão 16. Sejam $ABCD$ um quadrado e E um ponto sobre $\overline{AB}$. Considere as áreas do quadrado $ABCD$, do trapézio $BEDC$ e do triângulo ADE. Sabendo que estas áreas definem, na ordem em que estão apresentadas, uma progressão aritmética cuja soma é 200 cm^2, a medida do segmento $\overline{AE}$, em cm, é igual a

A ( ) $\frac{10}{3}$. B ( ) 5. C ( ) $\frac{20}{3}$. D ( ) $\frac{25}{3}$. E ( ) 10.

Questão 17. Num triângulo ABC o lado $\overline{AB}$ mede 2 cm, a altura relativa ao lado $\overline{AB}$ mede 1 cm, o ângulo $A\hat{B}C$ mede 135^0 e M é o ponto médio de $\overline{AB}$. Então a medida de $B\hat{A}C + B\hat{M}C$, em *radianos*, é igual a

A ( ) $\frac{1}{5}\pi$. B ( ) $\frac{1}{4}\pi$. C ( ) $\frac{1}{3}\pi$. D ( ) $\frac{3}{8}\pi$. E ( ) $\frac{2}{5}\pi$.

Questão 18. Um triângulo ABC está inscrito numa circunferência de raio 5 cm. Sabe-se ainda que $\overline{AB}$ é o diâmetro, $\overline{BC}$ mede 6 cm e a bissetriz do ângulo $A\hat{B}C$ intercepta a circunferência no ponto D. Se α é a soma das áreas dos triângulos ABC e ABD e β é a área comum aos dois, o valor de $\alpha - 2\beta$, em cm^2, é igual a

A ( ) 14. B ( ) 15. C ( ) 16. D ( ) 17. E ( ) 18.

Questão 19. Uma esfera está inscrita em uma pirâmide regular hexagonal cuja altura mede 12 cm e a aresta da base mede $\frac{10}{3}\sqrt{3}\,cm$. Então o raio da esfera, em cm, é igual a

A ( ) $\frac{10}{3}\sqrt{3}$. B ( ) $\frac{13}{3}$. C ( ) $\frac{15}{4}$. D ( ) $2\sqrt{3}$. E ( ) $\frac{10}{3}$.

Questão 20. Considere as afirmações:

$I -$ Existe um triedro cujas 3 faces têm a mesma medida $a = 120^0$.

$II -$ Existe um ângulo poliédrico convexo cujas faces medem, respectivamente, 30^0, 45^0, 50^0, 50^0 e 170^0.

$III -$ Um poliedro convexo que tem 3 faces triangulares, 1 face quadrangular, 1 face pentagonal e 2 faces hexagonais tem 9 vértices.

$IV -$ A soma das medidas de todas as faces de um poliedro convexo com 10 vértices é 2880^0.

Destas, é(são) correta(s) apenas

A ( ) II. B ( ) IV. C ( ) II e IV.
D ( ) I, II e IV. E ( ) II, III e IV.

AS QUESTÕES DISSERTATIVAS, NUMERADAS DE 21 A 30, DEVEM SER RESOLVIDAS E REPONDIDAS NO CADERNO DE SOLUÇÕES.

Questão 21. Analise a existência de conjuntos A e B, ambos não-vazios, tais que $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A$.

Questão 22. Sejam $n \geq 3$ ímpar, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e z_1, z_2, ..., z_n as raízes de $z^n = 1$. Calcule o número de valores $|z_i - z_j|$, $i, j = 1, 2, ..., n$, com $i \neq j$, distintos entre si.

Questão 23. Sobre uma mesa estão dispostos 5 livros de história, 4 de biologia e 2 de espanhol. Determine a probabilidade de os livros serem empilhados sobre a mesa de tal forma que aqueles que tratam do mesmo assunto estejam juntos.

Questão 24. Resolva a inequação em $\mathbb{R}$: $16 < \left(\frac{1}{4}\right)^{log_{\frac{1}{5}}(x^2 - x + 19)}$.

Questão 25. Determine todas as matrizes $M \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tais que $MN = NM, \forall N \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Questão 26. Determine todos os valores de $m \in \mathbb{R}$ tais que a equação $(2-m)\,x^2 + 2m\,x + m + 2 = 0$ tenha duas raízes reais distintas e maiores que zero.

Questão 27. Considere uma esfera Ω com centro em C e raio $r = 6\,cm$ e um plano Σ que dista $2\,cm$ de C. Determine a área da intersecção do plano Σ com uma cunha esférica de $30°$ em Ω que tenha aresta ortogonal a Σ.

Questão 28.

a) Calcule $\left(cos^2 \frac{\pi}{5} - sen^2 \frac{\pi}{5}\right) cos\frac{\pi}{10} - 2\,sen\frac{\pi}{5}\,cos\frac{\pi}{5}\,sen\frac{\pi}{10}$.

b) Usando o resultado do item anterior, calcule $sen\frac{\pi}{10}\,cos\frac{\pi}{5}$.

Questão 29. Num triângulo AOB o ângulo $A\hat{O}B$ mede 135^0 e os lados $\overline{AB}$ e $\overline{OB}$ medem $\sqrt{2}\ cm$ e $\sqrt{2-\sqrt{3}}\ cm$, respectivamente. A circunferência de centro em O e raio igual à medida de $\overline{OB}$ intercepta $\overline{AB}$ no ponto $C\ (\neq B)$.

a) Mostre que $O\hat{A}B$ mede 15^0.

b) Calcule o comprimento de $\overline{AC}$.

Questão 30. Considere um triângulo equilátero cujo lado mede $2\sqrt{3}\ cm$. No interior deste triângulo existem 4 círculos de mesmo raio r. O centro de um dos círculos coincide com o baricentro do triângulo. Este círculo tangencia externamente os demais e estes, por sua vez, tangenciam 2 lados do triângulo.

a) Determine o valor de r.

b) Calcule a área do triângulo não preenchida pelos círculos.

c) Para cada círculo que tangencia o triângulo, determine a distância do centro ao vértice mais próximo.